

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a XI-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) (4p) Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuația
$$X^3 - 3X^2 + 3X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) (3p) În mulțimea $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, vom spune că o matrice este simplă dacă pe fiecare linie a sa, între orice două elemente egale cu 1 nu avem niciun element egal cu 0. Demonstrați că orice matrice simplă are determinantul -1, 0 sau 1.
2. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică $AB = 2A + 3B$. Să se arate că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ și că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.
3. Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_1 \in [-2; 2]$ și $x_{n+1} = \frac{3x_n+7}{x_n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se stabilească dacă există $p \in \mathbb{R}$, pentru care șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $y_n = n^p(\sqrt{7} - x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ să fie convergent către un număr real nenul.
4. Fie $x_n = \{\sqrt{n-1}\} + \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) (2p) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are un subșir cu limita 1.
 - b) (5p) Demonstrați că $\forall L \in [0,3]$, există un subșir al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ care are limita L .